XI ИНТЕРНЕТ-ОЛИМПИАДА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКЕ
ОСНОВНОЙ (ЗАОЧНЫЙ) ТУР

Задания

I. Эссе

1. Шесть рукопожатий. Прочитайте в Википедии статью про теорию шести рукопожатий:
https://ru.wikipedia.org/wiki/Теория_шести_рукопожатий#История_возникновения

Проанализируйте эксперименты, которые были проведены, чтобы сформулировать и обосновать эту теорию. Нет ли в них недостатков? Предположим, что вы решили проверить справедливость этой теории. Подумайте, как бы вы построили эксперимент, по возможности свободный от недостатков, присущих вашим предшественникам.

Комментарий. Практически все участники, кто выбрал это эссе, заметили, что выборки, участвовавшие в проведенных экспериментах, были нерепрезентативны. Либо речь шла о двух городах США, либо использовались определенные схемы передачи информации. К сожалению, никто не предложил метода проверки теории, достойного обсуждения. Никто, например, не задался вопросом, каково расстояние между любыми двумя жителями одного крупного, среднего или малого населенного пункта. Возможно, в ответе на этот вопрос кроется возможность подтвердить или опровергнуть гипотезу шести рукопожатий. Один из участников предположил, что способа аккуратной проверки гипотезы просто не существует.

2. Исчезновение фамилий. Рассмотрим население некоторой страны, где, как правило, женщины, выходя замуж, берут фамилию мужа. Например, таким свойством обладает почти любая европейская культура. Предположим, что в какой-то семье, носящей редкую фамилию, рождались только дочери. Тогда эта фамилия может исчезнуть через поколение-два, даже если потомки этих людей существуют: ведь они, скорее всего, живут под другими фамилиями. Может случиться так, что редкая фамилия исчезает потому, что у последних носителей этой фамилии вообще не было детей. Наверняка существуют и другие факторы, влияющие на распространённость или исчезновение фамилий. Что это за факторы?

Попробуйте оценить, с какой скоростью исчезают редкие фамилии. Может быть, есть механизмы возникновения новых фамилий? Может ли статься так, что в определённых условиях, в конце концов, останется одна-единственная фамилия?

Комментарий. К сожалению, интересных эссе на сей счет мы не получили. Были рассуждения «об одних только дочерях» и «об одних только сыновьях», о тех, кто перед сном внезапно решил сменить фамилию. Не рассмотрены важнейшие факторы возникновения новых фамилий, такие как война, когда в детских домах младенцам и детям, не знающим свою фамилию, дают новые фамилии, изобретая их по мере надобности. Так, во время Великой Отечественной войны появилось огромное количество Бесфамильных, Непомнящих, Самолетовых, Майоровых, Солдатовых и т.п. Некоторым детям давали фамилии по имени места, где находился детский дом. Война не только порождала фамилии, но и уничтожала их. До войны в СССР было весьма много людей, носивших фамилии немецкого происхождения. Во время и после войны эти фамилии массово исчезали: заключая браки, супруги выбирали русскую фамилию. Такая же примерно история случилась за сто с лишним лет до этого: множество французских фамилий исчезло в России после войны 1812 года.

В полученных эссе также не было ни одной попытки количественно проследить скорость исчезновения редкой фамилии при каких-то естественных предположениях на примере сел, где остались только Макаровы или Ивановы. Чаще всего это сибирские села, где одна из фамилий постепенно «победила» все другие.

3. Реформа орфографии. В 1918 году была проведена реформа русской письменности. По новым правилам перестали писать твёрдый знак Ъ (ер) в конце слов, оканчивающихся согласным звуком. Например, предлог «В» прежде писался так: «ВЪ». Кроме того, вовсе исчезли некоторые буквы. Были и другие изменения, но они нас сейчас не интересуют.

Исчезнувшая буква	Пишется вместо нее	Примеры написания слов	
		До реформы	Сейчас
Ѣ (ять)	Е	ДѢТИ	ДЕТИ
Ѳ (фитá)	Ф	АРИѲМЕТИКА	АРИФМЕТИКА
I (и десятеричное)	И	МИЛЛIОНЪ	МИЛЛИОН
Ѵ (ижица)	И	СѶНОДЪ	СИНОД

Интересно, насколько больше или меньше бумаги стало расходоваться при печати газет, журналов и книг. Оцените полученную экономию бумаги каким-нибудь подходящим способом.

Конечно, нужно помнить про отмену твёрдого знака в концах многих слов. А ещё следует принять во внимание, что буквы немного разной ширины. Например, буква И сильно шире буквы I, буква Ф чуть-чуть шире буквы Ѳ, зато буква Е немного уже буквы Ѣ. Разумеется, при оценке экономии бумаги нужно учесть частоту букв в текстах, например, твёрдый знак фигурировал часто, буква Ѳ встречалась редко, а ижица к 1918 году осталась только в редких словах греческого происхождения, например, МѴРО, СѶНОДЪ и в производных от этих слов.

Комментарий. Несколько авторов взялись за это эссе, но, увы, очень плохо разобрались в вопросе. Один из авторов предположил, что все буквы «ф» раньше писались фитой, а это, конечно, не так. Сделанные оценки далеки от правдоподобных.

Наиболее существенными факторами являются исчезновение твердого знака в конце слов и замена буквы «i» буквой «и». Буква «i», в отличие от фиты, использовалась весьма часто – перед гласными и перед «й». Таким образом, экономия бумаги получается, в основном, за счет исчезновения «ъ» в конце слов, оканчивающихся на согласную. В сторону «повышенного расхода бумаги» действует исчезновение «i». Один из авторов взял на себя труд проанализировать страницу художественного текста, но расчеты и выводы оказались запутанными, с большим числом ошибок, неверными исходными посылками и странными заключениями.

II. Задачи

4. Конкурс (от 6 класса, 1 балл). В одной социальной сети проводился конкурс фотографий. На конкурс было представлено несколько фотографий, и каждый участник мог оценить каждую фотографию, поставив ей либо 0 (не нравится), либо 1 (не очень нравится), либо 2 (очень нравится).

Было объявлено две номинации: самая привлекательная фотография, которая набрала больше всего очков, и самая отвратительная фотография, которую больше всего участников оценили в 0 очков. Могло ли случиться так, что в обеих номинациях победила одна и та же фотография?

Решение. Построим таблицу, в которой показано как такое может случиться всего с двумя фотографиями и тремя участниками голосования.

	Фото 1	Фото 2
1 участник	2	1
2 участник	2	1
3 участник	0	1

Ответ: да, такое возможно.

5. Юбилей встречи (от 6 класса, 2 балла). Как известно, друг и компаньон Робинзона Крузо получил имя Пятница по той причине, что встретились они в какую-то пятницу. Это было в январе, а вот в каком году — установить уже невозможно. Робинзон уверен лишь в том, что с равными шансами это могло случиться в любой год, начиная с 1668-го и заканчивая 1671-ым. Робинзон и Пятница свято чтили день своей встречи и торжественно отмечали его каждый год. Каким днём недели мог оказаться день одиннадцатой годовщины их встречи? С какой вероятностью?

Решение. Нужно учесть, что годы бывают обычными и високосными (если номер года делится на 4). В обычном году 365 дней, а в високосном — 366. При делении на 7 числа 365 и 366 дают остатки 1 и 2 соответственно. Поэтому если какое-то событие приходится на пятницу в январе невисокосного года, то ровно через год будет суббота. Високосный год «прибавляет» не один день недели, а два: если событие произошло в январскую пятницу високосного года, то ровно через год будет воскресенье.

За 11 лет «набежит» 11 дней и ещё столько дней, сколько за эти годы было високосных лет. Если Пятница и Робинзон встретились в 1668 году, то в течение 11 лет после этого было 3 високосных года: 1668, 1672 и 1676. К пятнице нужно «прибавить» 14 дней, то есть ровно две недели, поэтому 11-летие пришлось снова на пятницу. Аналогично рассмотрим остальные годы. Для удобства составим таблицу.

Год встречи	**За 11 лет было високосных лет**	**Сколько дней набежало**	**День недели в день 11-летия встречи**
1668	3 (1668,1672 и 1676)	14	Пятница
1669	2 (1672 и 1676)	13	Четверг
1670	3 (1672, 1676 и 1680)	14	Пятница
1671	3 (1672, 1676 и 1680)	14	Пятница

Таким образом, 11-летие встречи Робинзон и Пятница отмечали в пятницу или в четверг. Соответствующие вероятности 0,75 и 0,25.

Ответ: в пятницу с вероятностью 0,75 или в четверг с вероятностью 0,25.

6. Девять карточек (от 6 класса, 2 балла). На 9 карточках написаны цифры от 1 до 9 – по одной на каждой карточке. Из них выбрали три случайные карточки и положили в ряд. Какова вероятность того, что получившееся трёхзначное число делится на 3?

Решение. Из условия следует, что выбранные цифры не повторяются — всех карточек по одной. Дальше будем говорить только о цифрах. Запишем их в три строки в зависимости от остатка при делении на 3.

$$\begin{array}{llll} 3 & 6 & 9 & \text{– остаток } 0 \\ 1 & 4 & 7 & \text{– остаток } 1 \\ 2 & 5 & 8 & \text{– остаток } 2 \end{array}$$

Сумма выбранных цифр делится на три в одном из двух случаев:

1. Все три цифры из одной строки. Таких троек три: $369, 147$ и 258.
2. В выбранной тройке ровно по одной цифре из каждой строки. Таких троек $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

Значит, событию A «сумма делится на три» благоприятствуют $N(A) = 30$ элементарных событий из общего числа $N = C_9^3 = 84$ равновозможных троек. Следовательно,

$$\mathrm{P}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{30}{84} = \frac{5}{14}.$$

Ответ: $\frac{5}{14}$.

7. Мороженое (от 6 класса, 2 балла.) Аня хочет купить мороженое, которое стоит 19 рублей. В кармане у неё две монеты по 10 рублей, две монеты по 5 рублей и одна монета в 2 рубля. Аня не глядя вынимает из кармана три монеты. Найдите вероятность того, что вынутых монет хватит, чтобы заплатить за мороженое.

Решение. Всего в кармане 5 монет, из них извлекаются 3. Следовательно, у этого опыта $C_5^3 = 10$ равновозможных исходов – извлечённых троек монет. Событию «Аня вынула не меньше 19 рублей» благоприятствуют пять из них: три исхода, когда вынуты две десятирублевые монеты и ещё какая-то, и два исхода, когда вынуты обе пятирублевые и одна из десятирублевых. Искомая вероятность равна $0,5$.

Ответ: 0,5.

8. Карты и пин-коды. Однажды карманник Кирпич[1] украл бумажник, в котором оказались четыре кредитные карты и записка с четырьмя пин-кодами к этим картам. Кирпич не знает, какой пин-код соответствует какой карте. Если три раза неправильно ввести пин-код к какой-то карте, то она заблокируется.

а) **(от 6 класса, 1 балл).** Покажите, что Кирпич сможет снять деньги с трёх карт, если будет действовать правильно.

б) **(от 7 класса, 2 балла).** Какова вероятность того, что Кирпич сможет снять деньги со всех четырёх карт?

[1] Карманник Кирпич (Константин Сапрыкин) – персонаж романа братьев Вайнеров «Эра милосердия». По этому роману снят знаменитый фильм «Место встречи изменить нельзя».

Решение. а) Взяв первый код и пробуя его на четырёх картах по очереди, Кирпич найдет карту, к которой этот код подходит. Взяв второй код и пробуя его на трёх оставшихся картах, он найдет второе соответствие. Затем – третье. Таким образом, он найдет коды к трём картам. Четвертая при этом может оказаться заблокированной.

б) Кирпич не сумеет подобрать коды ко всем четырём картам, только если ему очень не повезёт. Если к первому коду он сумел подобрать карту только с четвёртой попытки (вероятность этого $1/4$), то у него осталось три кода и три карты, но для каждой карты – только две попытки. Если теперь карту ко второму коду удалось найти только с третьей попытки (вероятность $1/3$), то осталось два кода и две карты. Если теперь ему опять не повезло (вероятность $1/2$), то одна из оставшихся двух карт будет заблокирована, а к другой он сумеет найти код. Вероятность такого развития событий равна $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$.

Следовательно, вероятность противоположного события равна $\frac{23}{24}$.

Ответ: б) $\frac{23}{24}$.

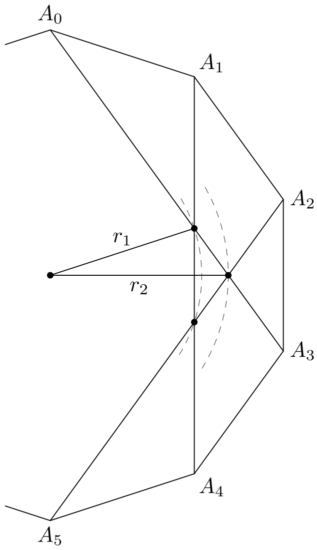
9. **Мешки в сарае.** Машина привезла 4 мешка цемента. Они лежат в кузове стопкой. За раз рабочий может перетащить один мешок из машины к калитке, либо от калитки в сарай. Рабочий может таскать мешки в любом порядке, каждый раз он берёт верхний мешок, несёт его куда надо и кладёт тоже наверх стопки (если там уже есть мешки). Если есть выбор, нести мешок из машины или от калитки, то рабочий выбирает каждый из этих вариантов с вероятностью 0,5. В итоге все мешки оказались в сарае.

а) **(от 7 класса, 1 балл).** Какова вероятность того, что в сарае мешки окажутся в обратном порядке по сравнению с тем, как они лежали в машине?
б) **(от 7 класса, 1 балл).** Какова вероятность того, что в сарае самым нижним окажется мешок, который в машине был вторым снизу?

Решение. а) Это возможно, только если рабочий каждый раз несет мешок из машины к калитке и сразу же относит его в сарай. Вероятность этого равна $(1/2)^3=1/8$.
б) Это произойдёт, только если рабочий сначала принес к калитке три мешка подряд (вероятность этого $(1/2)^2=1/4$), а потом отнес мешок от калитки в сарай (вероятность этого $1/2$). Следовательно, вероятность такого события равна $1/4\cdot 1/2=1/8$.
Ответ: а) $1/8$; б) $1/8$.

10. Правильные звёзды (от 8 класса, 3 балла). Пусть натуральные числа k и n взаимно просты, причём $n\geq 5$ и $k<n/2$. Правильной $(n;k)$-звездой назовём замкнутую ломаную, которая получится, если в правильном n-угольнике каждые k последовательных сторон заменить диагональю с теми же концевыми вершинами. Для примера на рисунке показана $(5;2)$-звезда. Эта звезда имеет 5 точек самопересечения — это жирные точки на рисунке. Сколько самопересечений у звезды $(2018;25)$?

Решение. Будем решать задачу в общем виде для $(n;k)$-звезды. Обозначим вершины n-угольника буквами A_0, A_1, и так далее до A_{n-1}. Возьмём два последовательных звена звезды: A_0A_k и A_1A_{k+1}. Они пересекаются на окружности радиусом r_1 с центром в центре n-угольника. Поворотами на $360°/n$ получаем ещё $n-1$ точку, лежащую на той же



окружности. Всего на этой окружности n точек, расположенных в вершинах меньшего n-угольника.

Теперь возьмём пару звеньев A_0A_k и A_2A_{k+2}. Они имеют общую точку на окружности радиуса $r_2 > r_1$. Таких точек ещё n.

На рисунке показан случай $k=3$: точка пересечения звеньев A_0A_3 и A_1A_4 лежит на окружности радиусом r_1. На этой же окружности расположена точка пересечения звеньев A_1A_4 и A_2A_5. А точка пересечения звеньев A_0A_4 и A_2A_5 лежит уже на большей окружности радиусом r_2.

Действуя так дальше, всего получим $k-1$ окружностей разных радиусов, на каждой из которых лежит ровно n точек пересечения. Поэтому никакие две точки не совпадают. Так перечисляются все точки пересечения звеньев, и всего их $n(k-1)$.

При $n=2018, k=25$ получаем, что число самопересечений равно $2018\cdot 24 = 48432$.

Возможны и другие решения, но в любом случае требуется объяснить, почему никакие две точки пересечения не совпадают.

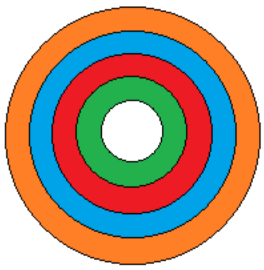
Ответ: 48432.

11. Одно совпадение (от 8 класса, 2 балла). В билете лотереи «6 из 45» всего 45 натуральных чисел. Из этих 45 чисел участник лотереи должен выбрать комбинацию, в которой ровно 6 чисел. Два участника независимо друг от друга выбирают свои комбинации. Какова вероятность того, что в их комбинациях окажется ровно одно общее число?

Решение. Пометим каким-нибудь тайным знаком шесть чисел, выбранных первым участником. Получается 6 помеченных чисел и 39 непомеченных. Нужно найти вероятность того, что в комбинацию, выбранную вторым участником, попало ровно 1 помеченное число и ровно 5 непомеченных. Вероятность этого равна $\dfrac{C_6^1 C_{39}^5}{C_{45}^6} \approx 0,424$.

Ответ: приближённо 0,424.

12. **Мишень (от 8 класса, 2 балла).** На стене висит мишень, состоящая из пяти зон: центральный круг (яблочко) и четыре разноцветных кольца (см. рисунок). Ширина каждого кольца равна радиусу яблочка. Известно, что число очков за попадание в каждую зону обратно пропорционально вероятности попасть в эту зону и что яблочко стоит 315 очков. Сколько очков стоит попадание в синюю (предпоследнюю) зону?



Решение. Предположим для определённости, что яблочко имеет радиус 1. Тогда синяя зона заключена между окружностями радиусами 3 и 4. Вероятность попасть в синюю зону относится к вероятности попадания в яблочко как площади этих зон:

$$\frac{p_я}{p_с} = \frac{1}{4^2-3^2} = \frac{1}{7}.$$

Тогда число очков x за синюю зону можно найти из пропорции

$$\frac{x}{315} = \frac{p_я}{p_с} = \frac{1}{7},$$

откуда $x = 315:7 = 45$.

Ответ: 45.

13. Залп-контроль. Артиллерийская система ракетного крейсера производит выстрел по цели. Если цель не поражена, система автоматически делает второй выстрел по той же цели. Третий выстрел по этой цели не производится. На борту крейсера 10 ракет. На учениях он выполняет стрельбы по нескольким целям в одинаковых условиях. Вероятность попадания при каждом одном выстреле равна p.

а) **(от 8 класса, 2 балла).** Если целей всего пять, какова вероятность того, что после стрельбы останется ровно три неиспользованных ракеты?

б) **(от 9 класса, 3 балла).** Найдите математическое ожидание числа поражённых целей, если всего целей девять.

Решение. а) Ровно три ракеты останутся только в одном случае: по двум целям крейсер стрелял дважды, а ровно три цели из пяти были поражены первым залпом. Таким образом, искомая вероятность равна тому, что в 5 испытаниях с вероятностью успеха p наступит ровно 3 успеха:

$$C_5^3 p^3 (1-p)^2.$$

б) Мысленно добавим ещё одну цель. Тогда всего целей десять: девять настоящих и одна – десятая – мнимая. Случайная величина Y «общее число пораженных целей из всех десяти» тогда имеет математическое ожидание $\mathrm{E}Y = 10p$, поскольку крейсер стреляет ровно десять раз.

Пусть I – случайная величина, которая определена так: $I = 1$, если крейсер уничтожил десятую цель, и $I = 0$, если не уничтожил. Тогда случайная величина X «число поражённых настоящих целей» равна $Y - I$.

Осталось найти $\mathrm{E}I$. Крейсер поразит десятую цель в единственном случае: на 9 целей потрачено ровно 9 ракет, а десятой ракетой уничтожена мнимая цель. Вероятность этого p^{10}. Следовательно, $\mathrm{E}I = 0\cdot\left(1-p^{10}\right)+1\cdot p^{10} = p^{10}$.

Тогда $\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y - \mathrm{E}I = 10p - p^{10}$.

Ответ: а) $10p^3(1-p)^2$; б) $10p - p^{10}$.

14. Чемоданы в аэропорту. В самолёт было загружено 200 чемоданов. После полёта пассажиры встречают свои чемоданы на ленте транспортёра. Как только транспортёр заработал, грузчик начал класть на него чемоданы по одному через каждые две секунды в случайном порядке (как привезли). Среди пассажиров группа бизнесменов, которые ждут 10 своих чемоданов.

а) **(от 8 класса, 3 балла).** Найдите вероятность того, что после запуска транспортёра бизнесменам придется ждать свой последний чемодан ровно две минуты.

б) **(от 9 класса, 3 балла).** Найдите математическое ожидание случайной величины «время, которое бизнесменам придётся ожидать последний чемодан».

Решение. а) Чтобы истекло ровно две минуты, последний чемодан должен идти 60-м по счёту. Среди первых 59 чемоданов выделим 9 мест для 9 чемоданов из нужной нам группы, а последний, 10-й чемодан из этой группы поставим на 60-е место. Получается ровно C_{59}^{9} способов выбрать 10 мест для 10 чемоданов так, чтобы последний оказался 60-м по счёту. Всего же существует C_{200}^{10} равновозможных способов выбрать на ленте места для 10 чемоданов из 200.

б) Мысленно добавим к последовательности чемоданов на ленте ещё один (чемодан 11-го бизнесмена, который не полетел) и будем считать, что этот чемодан самый последний на ленте. Тогда вся последовательность из 201 чемодана разбивается на 11 групп, в конце каждой группы – чемодан кого-то из бизнесменов. В силу симметрии математическое ожидание длины каждой группы равно $\frac{201}{11}$. Следовательно, математическое ожидание длины 10 групп равно $\frac{2010}{11}$, а ждать последний чемодан придётся в среднем $\frac{4020}{11} \approx 365,45$ секунды, то есть чуть больше 6 минут.

Ответ: а) $\frac{C_{59}^{9}}{C_{200}^{10}}$; б) $\frac{4020}{11}$ секунд.

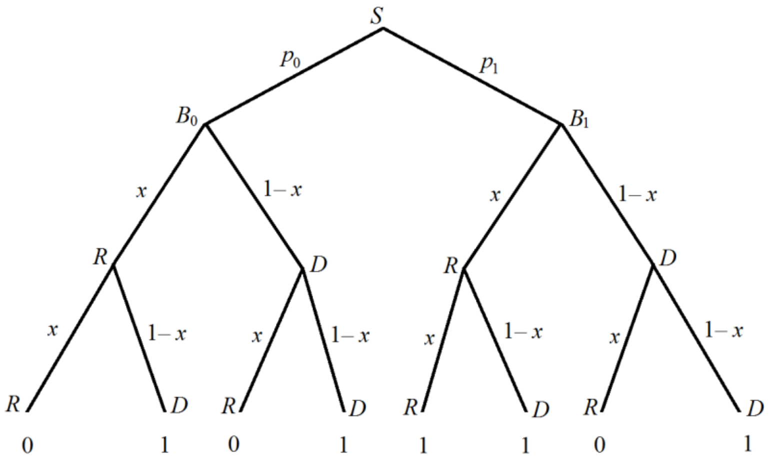
15. Два зонтика[2] (от 8 класса, 4 балла). Каждое утро Рассеянный Учёный идёт на работу, а вечером – домой. Всего у Учёного два зонтика, и Учёный берёт один из них с собой только в одном из двух случаев: либо на улице дождь, либо там, куда он идёт, зонтика нет. Через некоторое время Учёный подсчитал (а мы помним, что Рассеянный Учёный всё подсчитывает), что он берёт с собой зонтик в 20% случаев. Найдите вероятность дождя.

Решение. Очевидно, предполагается, будто вероятность дождя одна и та же каждый день. Обозначим эту вероятность x.

Будем считать, что сегодня Учёный идет из точки А в точку В (неважно, где работа, а где дом). Вернемся на сутки назад, когда он в предыдущий раз шёл из А в В, и рассмотрим три возможности: в пункте В не было зонтика, в пункте В был один зонтик и в пункте В было два зонтика.

Сразу заметим, что двух зонтиков в пункте В быть не могло, поскольку это значило бы, что Учёный вернулся в пункт А без зонтика, когда в А зонтиков не было вовсе, а это противоречит условию. Остаются две возможности: сутки назад в В не было зонтов (событие B_0 с вероятностью p_0) или в В был один зонт (событие B_1 с вероятностью p_1).

Построим дерево эксперимента, прослеживающее передвижения Учёного вчера из А в В и потом обратно из В в А.



Буквой R обозначим событие «дождь», буквой D — событие «дождя нет». Например, цепочка SB_0RD в дереве соответствует последовательности событий «вчера в пункте В зонтиков не было, по дороге туда дождь был, а на обратном пути — не было». Около рёбер подпишем соответствующие вероятности, а под каждой цепочкой напишем, сколько зонтиков осталось в пункте В после ухода Учёного[3].

---

[2] Задача составлена по сюжету, придуманному Андреем Дмитриевичем Сахаровым про самого себя. Отличие в том, что у академика Сахарова было не два зонтика, а три пары калош. Попробуйте решить оригинальную задачу с тремя парами галош (или зонтиков). Задача восстановлена И.Ф.Гинзбургом. **Академик А.Д.Сахаров. Научные труды.** Сборник. – М.: АОЗТ «Издательство ЦентрКом», 1995).

[3] Дерево будет немного проще, если заметить, что рёбра B_0R и B_0D можно отождествить, ведь Учёный обязательно берёт с собой зонтик, если в В зонта нет. Такая же хитрость возможна и с цепочками B_1RR и B_1RD.

Событию «сегодня зонтиков в В нет» соответствуют цепочки SB_0RR, SB_0DR и SB_1DR. Например, цепочка SB_0DR означает, что вчера в В зонтиков не было, поэтому Учёный принёс зонтик с собой, несмотря на отсутствие дождя (D), но снова унёс его в А, поскольку дождь пошёл (R). Считая, что вероятности событий B_0 «в В нет зонтиков» и B_1 «в В есть зонтик» не меняются день ото дня, получаем систему

$$\begin{cases} \mathrm{P}(B_0) = \mathrm{P}(SB_0RR) + \mathrm{P}(SB_0DR) + \mathrm{P}(SB_1DR), \\ \mathrm{P}(B_0) + \mathrm{P}(B_1) = 1, \end{cases}$$

то есть

$$\begin{cases} p_0 = p_0x^2 + p_0(1-x)x + p_1(1-x)x, \\ p_0 + p_1 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} p_0 = p_0x^2 + (1-x)x, \\ p_0 + p_1 = 1; \end{cases} \quad p_0 = \frac{x}{x+1}.$$

Остаётся выразить вероятность события «Учёный берёт с собой зонт» через вероятности независимых событий R «дождь» и B_0 «в пункте В нет зонтиков»:

$$\mathrm{P}(R \cup B_0) = \mathrm{P}(R) + \mathrm{P}(B_0) - \mathrm{P}(R) \cdot \mathrm{P}(B_0) = 0,2,$$

откуда

$$x + p_0 - xp_0 = 0,2; \quad x + \frac{x}{x+1} - \frac{x^2}{x+1} = 0,2; \quad 2x = 0,2x + 0,2; \; x = \frac{1}{9}.$$

Ответ: $1/9$.

16. Новые правила (от 9 класса, 3 балла). В Анчурии ежегодно проходит Конгресс Городов, на который приезжают делегации всех пяти городов[4]. В делегации каждого города есть члены правящей Анчурийской Партии Прогресса (APP), а также члены оппозиционной Партии Развития Анчурии (ADP). В разных делегациях количественное соотношение политических сил разное, но в каждой делегации членов APP большинство.

Конгресс проходит в два дня, и на каждый день избирается Председатель Конгресса. Процедура выборов такова: каждый вечер накануне заседания честным жребием выбирается город, а затем среди делегатов из выбранного города честным жребием выбирается Председатель на завтра.

Однажды президент Анчурии предложил новую процедуру.

1. За неделю до Конгресса честным жребием выбирается город.

2. Председатель на каждый день выбирается честным жребием из делегатов выбранного города.

В частном разговоре с премьер-министром президент объяснил, что новая процедура увеличит вероятность того, что оба дня Председателями будут члены лояльной APP. Премьер-министр был против изменений и возразил, что из-за новой процедуры вырастет вероятность того, что оба дня Председателями окажутся члены ненавистной ADP.

Кто прав – президент или премьер-министр?

Решение. Обозначим p_k вероятность того, что из делегации k-го города будет выбран член APP. При первом способе вероятность того, что оба дня Председателями будут члены APP, равна $p = \left(\frac{p_1 + \ldots + p_5}{5}\right)^2$. При втором способе она равна $p' = \frac{p_1^2 + \ldots + p_5^2}{5}$.

Из неравенства между средним арифметическим и средним квадратичным следует, что $p \le p'$, а поскольку не все p_k равны, то $p < p'$.

Но объяснить, как устроено «упрощённое» дерево, немного сложнее, чем то, что мы построили. Поэтому мы решили строить неупрощённое.

[4] Если верить О'Генри, в Анчурии пять городов: Сан-Матео, Коралио, Солитас, Альфоран и Аласан.

Точно так же убеждаемся, что утверждение премьер-министра тоже верно. Пусть $q_k = 1 - p_k$ – вероятность того, что из делегации k-го города будет выбран член ADP. Вероятности того, что оба дня Председателями будут представители ADP, равны $q = \left(\frac{q_1 + ... + q_5}{5} \right)^2$ по старым правилам и $q' = \frac{q_1^2 + ... + q_5^2}{5}$ – по новым. И снова вторая вероятность больше: $q < q'$. Противоречия нет: при втором способе уменьшается вероятность того, что в разные дни председательствовать будут представители разных партий.

Ответ: правы оба.

17. Парадокс трёх монет[5] **(от 9 класса, 4 балла).** Митя, Ваня и Дима бросили монету по $2n$ раз. Известно, что у Мити и Вани орлов случилось поровну. Что более вероятно: событие A «у Димы выпало ровно n орлов» или событие B «у Мити выпало ровно n орлов»? Если события не равновероятны, то во сколько раз одно из этих событий вероятнее другого?

Решение. Вероятность того, что у Мити и Вани орлов поровну, равна[6] $C_{4n}^{2n} \big/ 2^{4n}$. Очевидно, $\mathrm{P}(A) = C_{2n}^{n} \big/ 2^{2n}$. Найдём $\mathrm{P}(B)$:

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}\left(\text{у Мити } n \text{ орлов} \mid \text{у Мити и у Вани орлов поровну} \right) =$$

$$= \frac{\mathrm{P}\left(\text{у Мити } n \text{ орлов и у Вани } n \text{ орлов} \right)}{\mathrm{P}\left(\text{у Мити и у Вани орлов поровну} \right)} = \left(C_{2n}^{n} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \right)^2 : \left(C_{4n}^{2n} \cdot \frac{1}{2^{4n}} \right) = \frac{\left(C_{2n}^{n} \right)^2}{C_{4n}^{2n}}.$$

Осталось сравнить найденные вероятности:

$$\frac{P(B)}{P(A)} = \frac{C_{2n}^{n} \cdot 2^{2n}}{C_{4n}^{2n}} = \frac{\left((2n)! \right)^3 \cdot 2^{2n}}{(n!)^2 (4n)!} = \frac{\left[(n+1)(n+2)...2n \right]^2 \cdot 2^{2n}}{(2n+1)(2n+2) \cdot ... \cdot 4n} = \frac{\left[(2n+2)(2n+4) \cdot ... \cdot 4n \right]^2}{(2n+1)(2n+2) \cdot ... \cdot 4n} =$$

$$= \frac{(2n+2)(2n+4) \cdot ... \cdot 4n}{(2n+1)(2n+3) \cdot ... \cdot (4n-1)} = \left(1 + \frac{1}{2n+1} \right) \left(1 + \frac{1}{2n+3} \right) \cdot ... \cdot \left(1 + \frac{1}{4n-1} \right) > 1.$$

Найденное выражение показывает, во сколько раз событие B вероятнее события A. С помощью формулы Стирлинга можно найти приближенное значение:

$$\frac{\left((2n)! \right)^3 \cdot 2^{2n}}{(n!)^2 (4n)!} \approx \frac{\left(\sqrt{2\pi \cdot 2n} \left(2n/e \right)^{2n} \right)^3 2^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n} \left(n/e \right)^n \right)^2 \cdot \sqrt{2\pi \cdot 4n} \left(4n/e \right)^{4n}} = \sqrt{2}.$$

Ответ: Вероятность события B больше вероятности A в $\frac{C_{2n}^{n} \cdot 2^{2n}}{C_{4n}^{2n}}$ ($\approx \sqrt{2}$) раз.

18. Одинокие автомобили. (От 9 класса, 4 балла.) По очень длинному узкому шоссе, на котором невозможен обгон, в случайном порядке едут n автомобилей, каждый со своей излюбленной скоростью. Если быстрая машина догоняет медленную, то быстрой приходится замедлиться и ехать с той же скоростью, что и медленная. Таким образом, машины сбиваются в группы. Найдите математическое ожидание числа «одиноких» машин, то есть групп, состоящих из одной машины.

[5] Кажущаяся парадоксальность состоит в том, что сравнивая вероятности событий, связанных только с Димой и с Митей, приходится брать в расчёт событие, связанное с Митей и Ваней. Причём тут вообще Ваня?

[6] Вероятность того, что в двух случайных стопках из одинакового числа монет поровну орлов, легко найти, если перевернуть вторую стопку и положить сверху на первую. Получается, что достаточно найти вероятность того, что в стопке из удвоенного числа монет орлов ровно половина.

Решение. Пусть I_k – индикатор события «k – я по счёту машина одинока». При $k \le n$ это событие состоит в том, что из первых $k+1$ машин самая медленная идёт последней, а вторая по медлительности — предпоследней. Вероятность этого $\frac{1}{(k+1)k}$. Если $k=n$, то это событие состоит в том, что самая медленная машина идёт последней (вероятность $\frac{1}{n}$).

Случайная величина X «число одиноких машин» равно сумме всех индикаторов, поэтому

$$\mathrm{E}X = \mathrm{E}I_1 + \mathrm{E}I_2 + \ldots + \mathrm{E}I_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n} =$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = 1.$$

Ответ: 1.

19. Очерк о чемоданах (от 10 класса, 6 баллов). В книге Щепана Еленьского[7] имеется небольшой очерк о чемоданах.

В универмаг прислали 10 чемоданов, а в конверте отдельно 10 ключей, причём предупредили, что каждый ключ открывает только 1 чемодан и что к каждому чемодану можно подобрать подходящий ключ.

Работник универмага, который получал эти чемоданы, вздохнул:

– Сколько возни с подбором ключей! Я знаю, какими упрямыми бывают неодушевлённые предметы! Начнёшь подбирать ключ к первому чемодану, и обязательно окажется, что подойдёт только десятый ключ. Десять раз перепробуешь ключи из-за одного чемодана, а из-за десяти – целых сто раз!

Не будем цитировать Еленьского дальше, а кратко перескажем суть. Продавщица сказала, что число попыток не больше $10+9+8+\ldots+2+1=55$, другой сотрудник предложил ещё уменьшить число попыток, поскольку если ключ не подошёл к 9 чемоданам, то уж к десятому он точно подойдёт. Значит, число попыток не больше $9+8+\ldots+1=45$. Кроме того, он заявил, что так произойдёт только в самом неудачном случае – тогда, когда каждый раз ключ будет подходить к последнему чемодану. Нужно рассчитывать, что в реальности число попыток будет равно примерно половине наибольшего возможного числа попыток, то есть 22,5.

Игорь Федорович Акулич из Минска задумался, по какой такой причине среднее число попыток равно половине числа 45? Ведь последняя попытка не нужна, только если ключ не подошёл ни к одному чемодану, кроме последнего, а во всех других случаях последняя удачная попытка тоже имеет место. Акулич предположил, что утверждение про 22,5 попыток голословное, и на самом деле всё немного не так.

Задача. Найдите математическое ожидание числа попыток (считаются все попытки открыть чемоданы – неудачные и удачные, в том случае, когда нет ясности).

Решение. Будем решать задачу в общем виде, считая, что чемоданов n штук. Пусть Y – случайная величина, равная числу попыток открыть первый из n чемоданов. Очевидно, $Y=1$ с вероятностью $1/n$, $Y=2$ с вероятностью $\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}$ и так далее, до $Y=n-2$, но событие $Y=n-1$ имеет вероятность $2/n$, поскольку наступает в двух равновозможных случаях: когда подходящий ключ $(n-1)$-й или n-й по счету. Тогда

[7] «По следам Пифагора» (М., Детгиз, 1961).

$$\mathrm{E}Y=\frac{1+2+\ldots+(n-2)+(n-1)\cdot 2}{n}=\frac{1+2+\ldots+(n-2)+(n-1)+n}{n}-\frac{1}{n}=\frac{n+1}{2}-\frac{1}{n}.$$

Теперь, пусть X_n – число попыток. После того, как первый чемодан каким-то образом открыт, чемоданов останется $n-1$, и для них потребуется X_{n-1} попыток. И так далее. Значит, $X_n=Y+X_{n-1}$, откуда, переходя к ожиданиям и вводя для краткости обозначение $e_n=\mathrm{E}X_n$, находим:

$$e_n=e_{n-1}+\frac{n+1}{2}-\frac{1}{n}=e_{n-2}+\frac{n}{2}-\frac{1}{n-1}+\frac{n+1}{2}-\frac{1}{n}\text{ и т.д.}$$

Учитывая, что $e_1=0$, в конце концов получим явную формулу:

$$e_n=\frac{3+4+\ldots+(n+1)}{2}-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\frac{(n-1)(n+4)}{4}+1-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+\frac{1}{2}+1\right)=\frac{n(n+3)}{4}-H_n,$$

где H_n – n -е гармоническое число, равное

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Известно приближенное равенство $H_n\approx\ln n+\gamma+\dfrac{1}{2n}$, где $\gamma=0,5772....$ – константа Эйлера-Маскерони. С приемлемо малой погрешностью можно считать, что

$$e_n\approx\frac{n(n+3)}{4}-(\ln n+0,577).$$

При $n=10$ получается $e_{10}\approx 32,5-(\ln 10+0,577)\approx 29,62$.

Ответ: прибл. 29,62.